UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI SCIENZE AGRARIE E AMBIENTALI
PRODUZIONE, TERRITORIO, AGROENERGIA

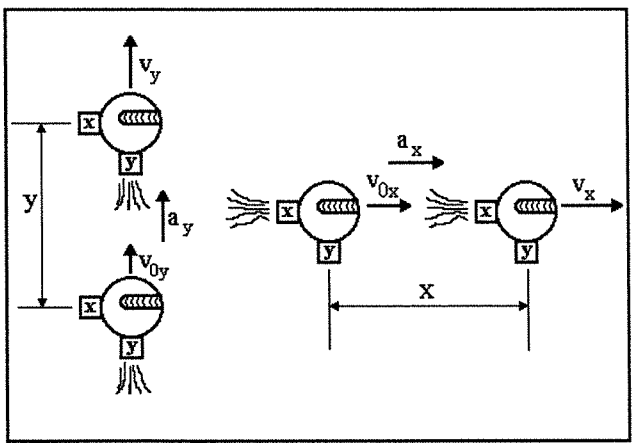
DISPENSE DEL CORSO DI

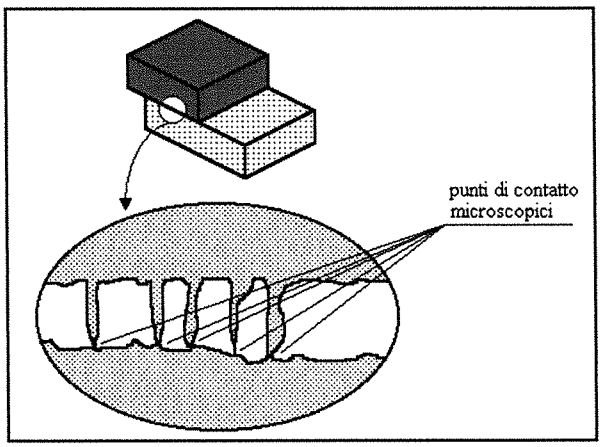
TECNICA COLTURALE E MECCANIZZAZIONE IN VITICOLTURA

Mod. 2: Meccanizzazione

(Prof. D. Pessina)

RICHIAMI DI CINEMATICA E DINAMICA





RICHIAMI SULLA CINEMATICA

Nello studiare i diversi fenomeni fisici nell'ambito della meccanica, risulta molto comodo assimilare un corpo, normalmente caratterizzato da una massa e da determinate dimensioni, ad un **punto materiale**, cioè una *particella puntiforme che sia rappresentativa dell'intero corpo*. Spesso risulta significativo immaginare questo punto collocato nel centro di massa del corpo considerato.

La **cinematica** è quella *parte della meccanica che studia il moto dei corpi, indipendentemente dalle cause che lo producono e lo mantengono.*

Moto unidirezionale e bidirezionale

Per **moto** si intende *lo spostamento di un corpo (qui di un punto materiale) da una posizone all'altra dello spazio*, avendo preventivamente identificato entrambe le posizioni tramite un sistema di riferimento, ad es. un sistema di coordinate cartesiane ortogonali tra loro.

La posizione del punto materiale deve pertanto essere definita nelle tre direzioni o assi fondamentali (denominati comunemente x, y, z) in riferimento ad un'origine comune. Per questo, *la posizione del punto è tipicamente un vettore.*

Il concetto di moto risulta legato al tempo, impiegato per effettuare lo spostamento stesso. In particolare, assume significato l'*intervallo di tempo*, cioè il tempo trascorso tra due eventi non contemporanei, nel caso considerato l'inizio e la fine del periodo di osservazione dello spostamento del punto.

Ciò significa che lo spostamento è funzione del tempo; ne consegue direttamente il concetto di velocità, definita come:

velocità = il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo

$$\text{velocità} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}}$$

Allora, se:

- lo spostamento è un vettore;
- il tempo è uno scalare;
- dividere un vettore per uno scalare equivale a moltiplicarlo per l'inverso di quest'ultimo;
- il prodotto di un vettore per uno scalare è un vettore;
-

si deduce che:

la velocità è un vettore, che ha unità di misura: **m/s.**

Con riferimento alla **fig. 1**, si può notare che nei tre casi riportati la velocità intesa come rapporto

$$|v| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

non dice nulla sulle caratteristiche del percorso seguito dal punto per andare da A a B, ma rappresenta la velocità **media**.

Se, però, si considerassero intervalli di tempo Δt sempre più piccoli, cioè un segmento di linea sempre più corto che congiunga i due punti terminali di esso, e quindi finisca per coincidere alla tangente alla curva in quel punto, si può affermare che la velocità media coincide alla pendenza della tangente stessa e la velocità si può definire **istantanea**, tale che si può applicare il concetto di derivata:

$$|v| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

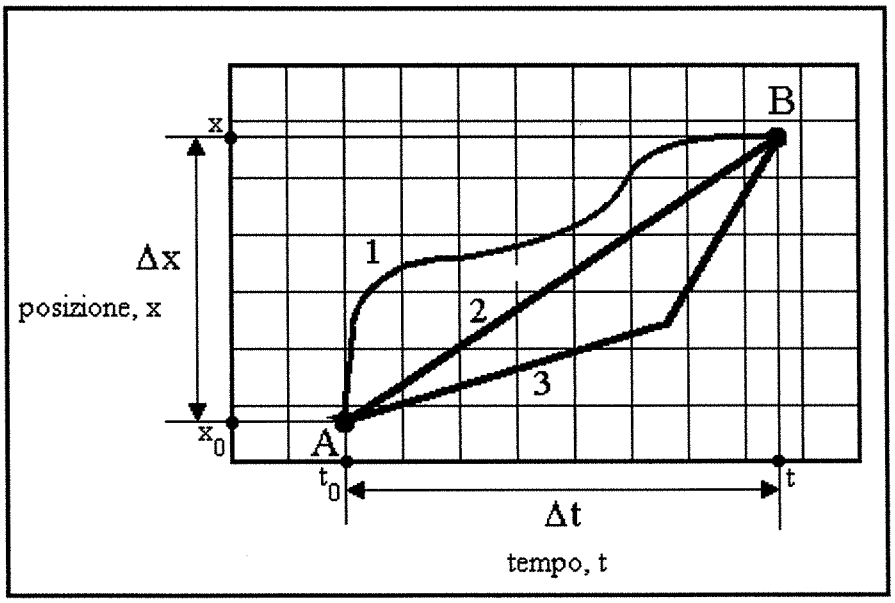


Fig. 1 - Differenti spostamenti di un punto materiale in un piano x (posizione), t (tempo)

Un'interessante definizione alternativa è che **la velocità rappresenta la <u>rapidità</u> dello spostamento** (di un punto materiale). Ma anche la velocità può variare nel tempo; questa variazione viene chiamata accelerazione. Quindi:

l'accelerazione rappresenta la *rapidità di variazione* della velocità

che si ottiene moltiplicando il vettore velocità per l'inverso dello scalare tempo, per cui anche l'accelerazione è un vettore, che ha unità di misura: m/s^2. Anche in questo caso si considera un'accelerazione media e una istantanea. Quest'ultima vale:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x^2}{dt^2}$$

Per interpretare i fenomeni e risolvere i problemi relativi alla cinematica, individuabili in un ambito di **accelerazione costante**, possono essere utilizzate le formule proposte in **tab. 1**, tenendo conto che:

- per risolvere un problema, si deve verificare che le informazioni fornite contengano, o siano ricavabili, valori per almeno tre delle cinque variabili cinematiche in gioco (spazio, accelerazione, velocità iniziale, velocità finale, intervallo di tempo);

- deve essere scelta una conveniente origine delle coordinate e per l'esattezza dei calcoli è importante fin dall'inizio definire quale direzione è positiva e quale negativa.

Tabella 1 - Equazioni della cinematica per accelerazione costante.

Equazione	Variabili				
	spazio **s**	accelerazione **a**	vel. iniziale $\mathbf{v_0}$	vel. finale **v**	tempo **t**
$v = v_0 + at$		√	√	√	√
$s = 1/2\ (v_0 + v)\ t$	√		√	√	√
$s = v_0 t + 1/2\ at^2$	√	√	√		√
$v^2 = v_0^2 + 2\ as$	√	√	√	√	

Un caso comune e conosciuto di moto ad accelerazione costante è la caduta dei gravi, cioè di un corpo che cade a terra, il cui valore è 9,81 m/s^2.

In realtà tale valore non è proprio costante, dipendendo dal luogo sul nostro pianeta dove si osserva il fenomeno, se la distanza percorsa non è grandissima e se non ci fosse la resistenza dell'aria.

Il moto trattato finora è di tipo unidirezionale; se, più compiutamente, si osserva il moto di un corpo in un piano, per il suo studio è necessario scomporlo in due componenti unidirezionali che avvengono contemporaneamente, considerando il moto complessivo come la loro somma vettoriale. Tutto ciò è corretto, poichè la posizione, la velocità e l'accelerazione sono grandezze vettoriali.

Se le due componenti, come risulta comodo fare, sono riferite alle direzioni x e y indicate da un sistema di coordinate cartesiane ortogonali tra loro, è importante comprendere che *la parte x del moto del punti si svolge come se la parte y non avvenisse affatto*. Analogamente la parte y del moto avviene come se la parte x non venisse considerata (**fig. 2**).

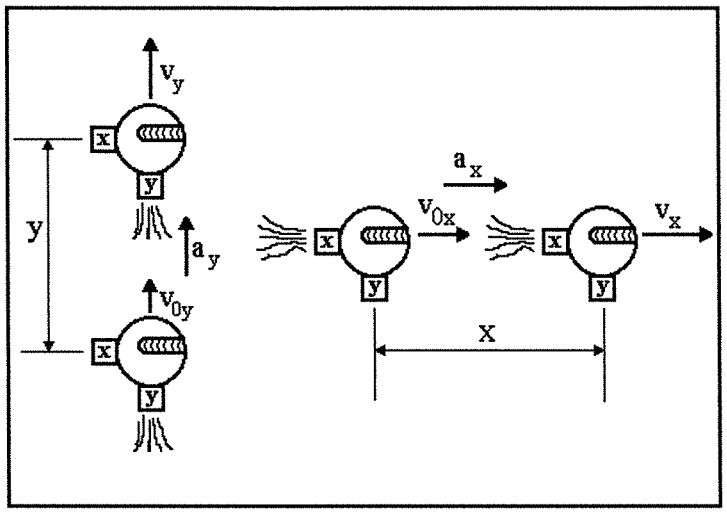


Fig. 2 - A sinistra: il veicolo spaziale si muove con accelerazione costante a_y parallela all'asse y. Non c'è moto nella direzione x, perchè il motore "x" è spento. A destra: il veicolo spaziale si muove con accelerazione costante a_x parallela all'asse x. Non c'è moto nella direzione y, perchè il motore "y" è spento.

Un caso particolare e conosciuto di moto bidirezionale è il **moto dei proietti**, di tipo curvilineo uniformemente accelerato, poichè il corpo è soggetto soltanto all'accelerazione di gravità (a patto di considerare trascurabile la resistenza dell'aria, che rallenta il proietto) $a_y = 9{,}81$ m/s², che agisce nell'asse verticale.

Nell'asse x, orizzontale, l'accelerazione è nulla, cioè $a_x = 0$. Di conseguenza la velocità è costante, cioè $v_x = v_{0x}$.

Nel caso prospettato in **fig. 3**, entrambe le casse, lanciate alla medesima quota da un pallone aerostatico e da un aereo, raggiungono il suolo nello stesso istante, poichè le variabili nell'asse verticale (una definita quota y rispetto a terra, accelerazione di gravità $a_y = 9{,}81$ m/s² e velocità iniziale $v_{0y} = 0$) hanno lo stesso valore.

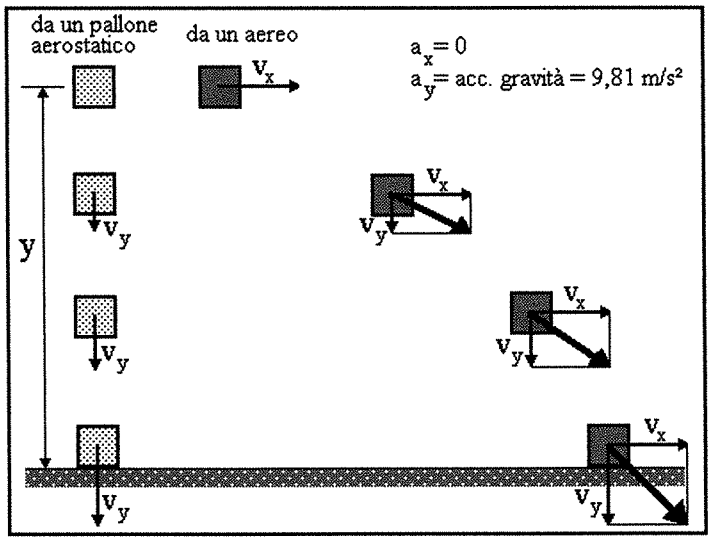


Fig. 3 - Caratteristica dei parametri cinematici di due casse lanciate da un pallone aerostatico e da un aereo.

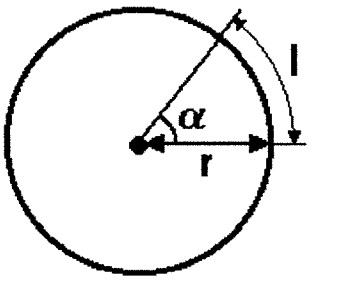
Poichè le componenti x e y del vettore velocità sono ortogonali tra loro, per il calcolo del loro valore, noto l'angolo rispetto ad una delle due direzioni definite, si possono usare le note leggi della trigonometria, mentre anche il teorema di Pitagora si rivela utile per l'operazione opposta.

Moto circolare

Radiante

Gli angoli, oltre che in gradi, possono essere misurati in radianti; più precisamente, e con riferimento alla **fig. 4**, la definizione di radiante è:

un angolo piano al centro che su una circonferenza intercetta un arco di lunghezza pari al raggio



$r = l \rightarrow \alpha = 1\ rad$

Fig. 4 - Definizione grafica del concetto di radiante.

In altre parole, se si immaginasse di "raddrizzare" la porzione di circonferenza intercettata dall'angolo piano al centro, questa sarebbe di lunghezza uguale a quella del raggio.

Quanto vale in gradi il radiante ? Ricordando che il perimetro della circonferenza vale 2 π r e quindi l'angolo giro è 2 π r/r = 2 π rad, si può scrivere la proporzione:

$$x = \frac{2\pi rad}{1rad} = \frac{360\ °}{x} \qquad 6{,}28... = \frac{360\ °}{x} \qquad x = \frac{360\ °}{6{,}28...} = 57{,}2957...° \approx 57{,}3°$$

Per le finalità di questo corso, la definizione degli angoli in radianti serve per calcolare correttamente, utilizzando il sistema SI, la velocità angolare di rotazione di un motore e, più in generale, di tutte le parti rotanti in moto circolare.

Velocità angolare

Quando un corpo si muove su una traiettoria circolare, è caratterizzato da una **velocità** che si definisce **angolare**. Con riferimento alla **fig. 5**, essa è definita come il rapporto tra l'angolo al centro α (Δα) individuato dalla porzione di traiettoria percorsa l (Δl) e il tempo impiegato t (Δt) a percorrerla:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \quad \text{(rad/s)}$$

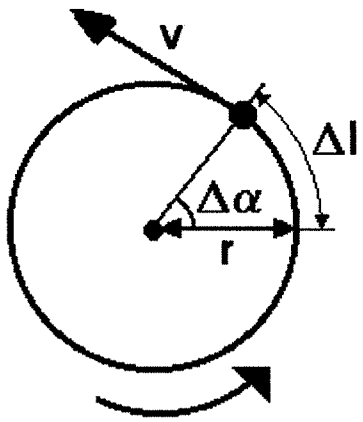


Fig. 5 - Il moto circolare.

Nella realtà, però, benchè rad/s sia l'unità di misura (composta) corretta, perché fa riferimento al sistema SI, essa è molto poco usata. La velocità angolare si misura invece molto spesso in *giri/min*, più rigorosamente definiti come min^{-1}.
E' importante, e molto utile, essere in grado di convertire efficacemente i valori di velocità angolare nelle due unità di misura, poiché a fronte di un regime di rotazione, generalmente espresso in giri/min, se bisogna calcolare ad esempio la potenza, che risulta essere in W, bisogna moltiplicare il valore della coppia (in Nm) per il regime di rotazione, appunto, in rad/s.
Ricordando, allora, che una rotazione completa sulla traiettoria circolare corrisponde al centro ad un angolo giro, che è 2π rad e che un minuto equivale a 60 s, si può scrivere:

$$1\frac{\text{giro}}{\text{min}} = \frac{2\pi\text{rad}}{60\text{s}} = \frac{2\pi}{60}\text{rad/s} = \frac{6{,}28...}{60}\text{rad/s} \cong 0{,}1\text{rad/s}$$

In calcoli che richiedano una certa precisione, tuttavia, per convertire un valore del regime di rotazione da giri/min a rad/s, è preferibile utilizzare il corretto rapporto arrotondato al secondo o al terzo decimale, che risulta essere:

$$6{,}28.../60 = \mathbf{0{,}105}$$

Se si preferisce, anzichè moltiplicare per 0,105, dividere per l'inverso, il fattore di conversione è 9,549.

Velocità periferica (o tangenziale)

Uno degli esempi classici per esplicitare la differenza esistente tra la velocità angolare e quella periferica, è citare la situazione tipica delle pattinatrici dello spettacolo su ghiaccio "Holiday on ice". In una figura molto nota, tali pattinatrici si sistemano su una fila rettilinea, una di fianco all'altra, trattenendosi per le spalle, e girano in tondo, facendo esercizi acrobatici. In quella situazione, pur compiendo tutte le danzatrici un

uguale numero di giri in un determinato tempo, si può notare un'evidente disparità di spazio percorso dal soggetto più al centro, che praticamente ruota su se stesso, e la compagna all'estremità del gruppo, che viceversa, "viaggia" molto velocemente e copre una notevole distanza (**fig. 6**).

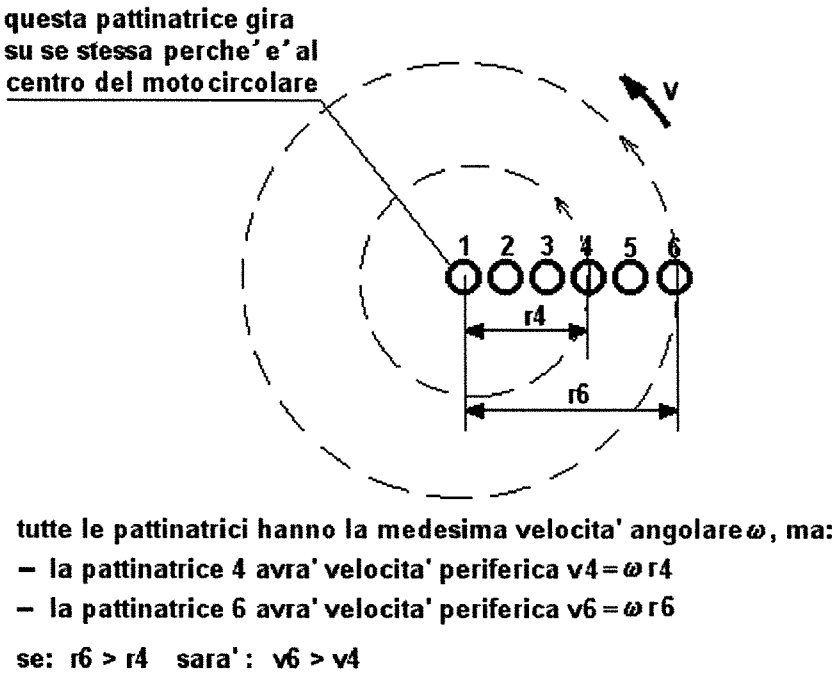


Fig. 6 - Rappresentazione schematica del noto numero delle pattinatrici di "Holiday on ice", per evidenziare la differenza esistente tra velocità angolare e velocità periferica.

Si deduce pertanto che la velocità periferica è funzione della distanza del corpo rotante dal centro della traiettoria circolare, e quindi dal suo raggio. Quindi, la velocità periferica sarà definita dalla velocità angolare per il raggio delle traiettoria percorsa:

$$V_{periferica} = \omega r \quad (m/s)$$

Se, infine, la velocità angolare risulta essere espressa in n min^{-1} (giri/min) e quindi il relativo valore è definito da:

$\omega = \frac{2\pi}{60} n$, la velocità periferica potrà essere calcolata come segue: $v = \frac{2\pi\ r\ n}{60}$

RICHIAMI SULLA DINAMICA (FORZA, LAVORO ED ENERGIA)

Leggi di Newton

I corpi, modellizzati come visto in punti materiali, hanno con l'ambiente che li circonda e con gli altri corpi presenti due tipi di interazione:

- a contatto (spinta, urto);
- a distanza (attrazione gravitazionale).

Se si immagina un corpo, fermo, ad es. un pallone di cuoio a terra, che viene calciato, l'esperienza mostra che il pallone si muove nella direzione del calcio e, nei primissimi istanti, con velocità crescente, e quindi accelerazione, funzione dell'intensità del colpo ricevuto.

Si può quindi immaginare che il calcio sia un vettore, con una certa direzione, verso e modulo (cioè intensità). Quest'ultimo può essere identificato nel vettore **forza**.

Se si raddoppia la forza, raddoppierà anche l'accelerazione, c'è cioè tra le due grandezze una proporzionalità diretta, anche vettoriale. Se, invece, si considera il medesimo pallone, ma fradicio (perchè ad es. si sta giocando su un campo bagnato), intuitivamente si comprende che, a parità di "calcio", il pallone subirà un'accelerazione tanto minore quanto più il pallone si sarà appesantito.

Esiste quindi un coefficiente di proporzionalità tra forza e accelerazione, la **massa**, che ha come unità di misura il chilogrammo, **kg**. Quindi:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

La massa m:

- è uno scalare, perchè forza e accelerazione hanno i medesimi direzione e verso;
- è una proprietà del corpo, perchè non dipende solo dalle sue dimensioni geometriche;
- si può infine dedurre che il significato fisico di "massa" è individuabile come quella proprietà dei corpi che si oppone al moto, e per questo è anche definita **massa inerziale**.
-

Se, come si è visto, spesso non è una sola forza, ma una risultante di più forze che agiscono su un corpo, la seconda legge di Newton afferma:

l'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla risultante delle forze su di esso applicate

Come caso particolare della seconda legge di Newton si deduce la prima:

se la risultante delle forze che agiscono su di un corpo di massa non nulla è nulla, esso mantiene invariato il suo stato di moto; se è fermo, resta fermo; se si muove a velocità costante, continua così indefinitamente

Le leggi della meccanica classica sono completate dalla terza legge di Newton, definite anche legge di azione e reazione, che afferma:

a ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria, cioè quando due corpi esercitano mutuamente delle forze, queste hanno modulo e direzioni uguali, ma verso opposto

Forze

Esistono molti tipi di forze; per le finalità di questo corso, se ne possono richiamare alcuni tipi principali:

- la forza gravitazionale (forza peso);
- le forze di attrito;
- la tensione;
- la forza centripeta (centrifuga).

1. Forza gravitazionale (forza peso)

Il punto di partenza è la legge di gravitazione universale di Newton:

"ogni punto materiale esistente nell'universo esercita una forza attrattiva su ogni altro punto materiale. Se 2 punti materiali hanno masse m_1 e m_2 e sono separati da una distanza d, la forza che si esercita è diretta lungo la congiungente i 2 punti materiali (fig. 4) e ha modulo:"

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

dove G è la costante di gravitazione universale, il cui valore è stato determinato sperimentalmente e vale $6{,}673 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 / kg^2$.

La legge di gravitazione universale vale per corpi puntiformi. Tuttavia, se le dimensioni dei corpi sono piccole rispetto alla distanza d che separa i loro centri (ossia quei punti in cui si può immaginare che sia concentrata tutta la loro massa) l'equazione di tale legge può comunque essere applicata con buona approssimazione.

Applicando tale principio a qualsiasi corpo presente sulla Terra e la Terra stessa, balza all'occhio che la massa della Terra è enormemente più grande che non quella di qualsiasi altro corpo (**fig. 7**). Quindi sarà avvertibile solo la forza di attrazione che la Terra produce sugli altri corpi, che non viceversa.

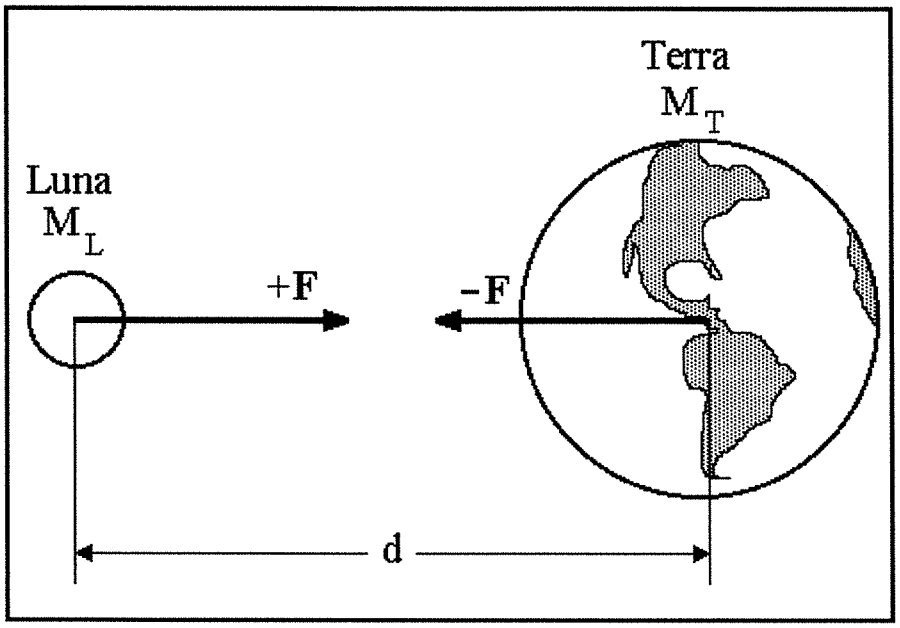


Fig. 7 - La forza gravitazionale che si esercita tra due sfere materiali uniformi è uguale a quella che si eserciterebbe se ciascuna sfera fosse un punto materiale con la massa concentrata nel centro. La Terra e la Luna approssimano tali sfere uniformi.

Si può quindi ora attribuire significato al concetto di **forza peso** (comunemente detta solo peso):

il peso (o forza di gravità) di un corpo sulla Terra è la forza gravitazionale che la Terra esercita sul corpo. Il peso agisce sempre verso il basso, quindi verso il centro della Terra. Su un altro corpo astronomico, il peso di un corpo è la forza gravitazionale esercitata da quel corpo astronomico sul corpo in questione.

L'equazione F = ma, considerando l'accelerazione di gravità g = 9,81 m/s², diventa:

$$\mathbf{P} = m \cdot \mathbf{g}$$

E' importante notare che, mentre la massa è una proprietà intrinseca dei corpi, il peso dipende dal valore dell'accelerazione di gravità, cioè dal luogo dove si trova la massa. Questa è la ragione per la quale sulla Luna, ad es. i corpi, pur avendo evidentemente la medesima massa, *pesano* circa 6 volte meno, perchè la Luna attrae tali corpi con una forza 6 volte inferiore.

2. Forze di attrito

Quando un corpo dotato di una definita massa è a contatto con una superficie, oltre ad una forza perpendicolare (comunemente è la forza peso) agisce una forza *parallela* alla superficie, chiamata **attrito**.

A seconda dei casi e delle necessità, la tecnica si impegna per ridurre al minimo o, all'opposto, per massimizzare l'attrito.

Due esempi, entrambi presenti sui veicoli, possono chiarire il concetto: l'olio lubrificante presente nel motore minimizza gli attriti interni tra pistone e cilindro (oltre ad asportare parte del calore generato); al contrario, sulle superfici dei dischi della frizione o delle pinze dei freni sono depositati materiali (di natura organica o inorganica) tali da generare elevati attriti quando sono posti a contatto per scorrimento.

Le cause dell'attrito non sono state ancora completamente chiarite; si pensa che, a causa della scabrosità delle superfici, l'*area effettiva di contatto sia molto inferiore a quella apparente*. Dove effettivamente esse si toccano, **si generano intense forze intermolecolari mutue attrattive**, paragonabili a saldature a freddo (**fig. 8**).

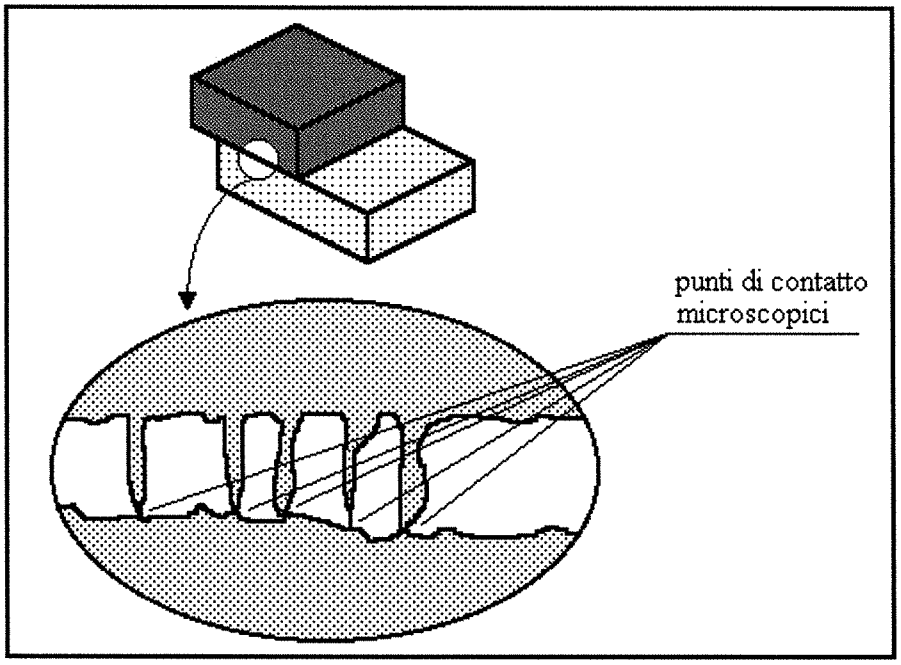


Fig. 8 - Per quanto levigate possano sembrare ad occhio nudo, se esaminate al miscroscopio le superfici dei corpi presentano sempre una certa scabrosità. Pertanto la superficie di contatto è sempre inferiore (a volte anche di molto) a quella apparente.

Se si tenta di muovere un blocco su un piano, aumentando da zero e in modo continuo la forza di tiro o di spinta f_S, ad un certo punto il blocco inizia a nuoversi. Il valore del modulo della forza necessaria per *iniziare* il movimento ($f_{S\ max}$) è pari al valore massimo del modulo dell'**attrito statico**. Quindi se all'inizio dell'applicazione della forza di tiro o di spinta, la condizione era $f_S < f_{S\ max}$, quando inizia il movimento si verifica $f_S = f_{Smax}$. La forza di attrito statico massimo evidenzia due caratteristiche importanti:

- è indipendente dall'area macroscopica apparente di contatto tra i corpi;

- il suo modulo è *direttamente proporzionale* al modulo della forza peso P , cioè tanto più intensamente le superfici sono premute una contro l'altra, tanto maggiore è f_{smax}, poichè aumenta il numero di saldature a freddo. Questa proporzionalità è espressa come **coefficiente di attrito radente** (o allo strisciamento) **statico** μ_s, cioè:

$$f_{smax} = \mu_s \cdot P$$

E' importante tener presente che *la relazione mette in rapporto solo i moduli delle forze in gioco*, poichè f_{smax} è parallela alla superficie, mentre F_n è perpendicolare.

Quando un corpo è già in moto, interviene un tipo di forza simile all'attrito statico, che, per il concetto stesso di movimento, viene definita **attrito dinamico**. L'attrito dinamico presenta tre caratteristiche principali:

- è indipendente dall'area macroscopica apparente di contatto tra i corpi;
- è indipendente dalla velocità del moto di strisciamento, se il modulo di tale velocità è piccolo;
- è direttamente proporzionale al modulo della forza normale tramite una costante definita **coefficiente di attrito radente dinamico** μ_d.

Anche l'esperienza mostra che μ_d ha valori tipicamente minori di μ_s, cioè per il medesimo tipo di contatto l'attrito dinamico è sempre minore di quello statico. Ciò è probabilmente dovuto al minor tempo di contatto effettivo tra le due superfici interessate, e pertanto ad un numero più ridotto di "saldature a freddo" che si creano, oltre naturalmente alla minore entità delle forze intermolecolari mutue attrattive che si generano.

In pratica, l'attrito statico si oppone al moto relativo *incipiente* tra due corpi, mentre quello dinamico di oppone al moto relativo di strisciamento *reale*, che un osservatore può effettivamente constatare.

3. Attrito radente e volvente

L'attrito dinamico può essere ulteriormente classificato in due "sottocategorie":

- l'attrito cioè generato dallo **strisciamento** puro tra due superfici piane (o tra una appartenente ad un corpo in movimento e l'altra ad un oggetto fermo) detto più precisamente **attrito radente**;

- l'attrito generato dal **rotolamento** reciproco tra due superfici (caso classico: le sfere e l'anello esterno di un cuscinetto a sfere) o, molto più frequentemente, dal rotolamento della superficie di un corpo rotondeggiante, al limite circolare (ad es. una ruota), su una superficie piana, o assimilata come tale (ad esempio il terreno); questi sono casi di **attrito volvente**.

Il modulo degli attriti radente e volvente sono calcolabili entrambi a partire dalla formula, già vista:

$f_d = \mu_d \cdot P$ che, per chiarezza, diventa: $f_r = \mu_r \cdot P$ (*a. radente*)

e: $f_v = \mu_v \cdot P$ (*a. volvente*)

3.1 Attrito radente

Con riferimento alla **fig. 9**, se un corpo con peso P è in movimento uniforme con velocità **v**, a contatto e con strisciamento su una generica superficie, l'intensità dell'attrito sarà calcolabile con la formula: $f_r = \mu_r \cdot P$; particolare interesse assume pertanto, noto il peso P, il coefficiente d'attrito μ_r.

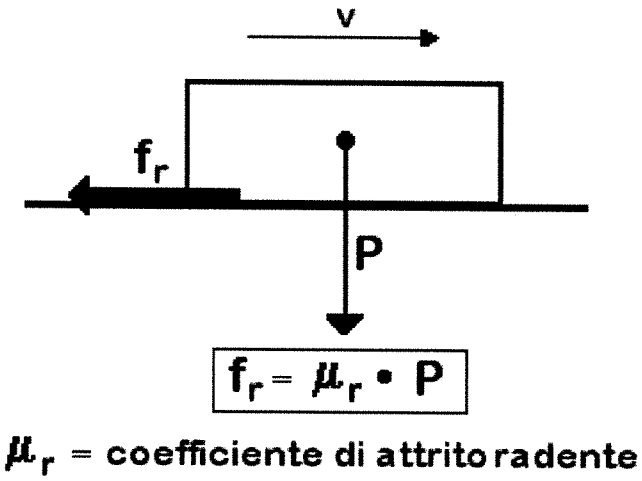


Fig. 9 - Rappresentazione e quantificazione dell'attrito radente.

Per calcolare sperimentalmente μ_r, si può ricorrere all'esperienza del piano inclinato.

a realtà ci suggerisce che un corpo piano, appoggiato su una superficie inclinata, per la quale sia possibile variare l'inclinazione, aumentandola progressivamente, si mette in movimento verso il basso solamente oltre una certa pendenza, cioè quando α l'angolo supera un determinato valore critico (**fig. 10**).

Proprio questo valore dell'angolo quindi definisce il passaggio dall'attrito statico a quello dinamico, di strisciamento in questo caso. Se ne deduce quindi che, in tale situazione particolare il coefficiente d'attrito statico μ_s sia molto simile a quello di attrito dinamico, di tipo radente, μ_r, tale che $\mu_s \approx \mu_r$.

La forza peso P del corpo può infatti, seguendo una delle classiche regole della scomposizione vettoriale (ad esempio quella del "parallelogramma"), essere scomposto in due componenti ortogonali (cioè perpendicolari) tra di loro, una parallela al piano inclinato (P_x), e l'altra perpendicolare allo stesso (P_y).

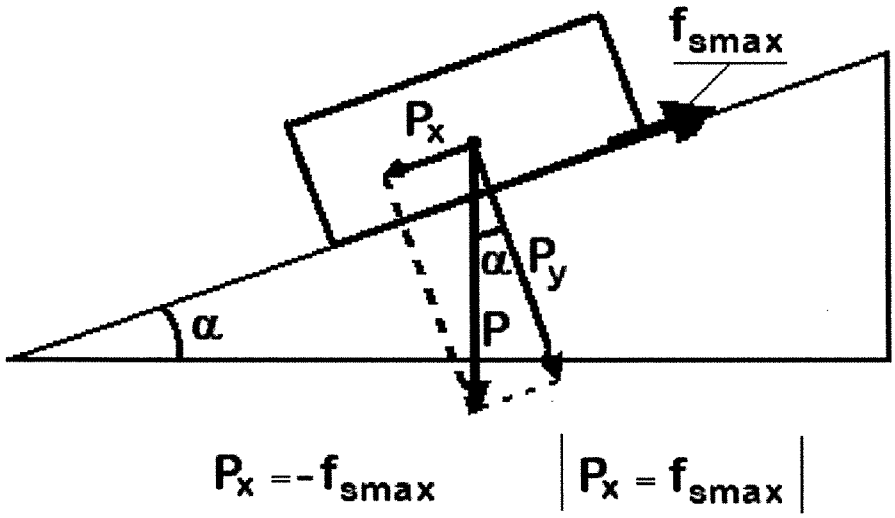


Fig. 10 - Rappresentazione dell'esperienza del piano inclinato: finchè $P_x < f_{smax}$, il corpo resta immobile; se, invece, $P_x > f_{smax}$ il corpo si mette in movimento; $P_x = f_{smax}$ è la condizione limite, cui corrisponde il valore critico dell'angolo α.

In assenza di attrito, si intuisce che la componente P_x farebbe scivolare verso il basso il corpo: che cosa lo tiene fermo (fino ad un certo punto) sul piano inclinato? Proprio la forza di attrito statico f_S , il cui valore massimo f_{smax} è uguale e contrario (e, quindi, come *modulo, è uguale in valore assoluto*) a P_x nel momento in cui il corpo inizia a muoversi, cioè quando il movimento è incipiente. Dopo ciò, l'attrito si trasforma in dinamico.
Quindi, trascurando i segni, si può scrivere:

$$P_x = f_{smax} = \mu_s \cdot P$$

Il triangolo rettangolo individuato dal piano inclinato è però simile (cioè con gli angoli uguali) a quello definito dalla forza peso P e dalle sue due componenti già citate; quindi, per le note regole della trigonometria, valgono le relazioni:

$$P_x = P \cdot \text{sen}\alpha \qquad \text{e} \qquad P_y = P \cdot \cos\alpha$$

P_x è in pratica quella componente della forza peso che tende a trascinare il corpo verso il basso, mentre P_y è invece la componente "rimanente" della forza peso medesima, che va a causare l'attrito.
In particolare, conoscendo il valore di α e, ovviamente, la forza peso P del corpo, è possibile calcolare P_x e, quindi, f_{smax} .
Riguardo invece al coefficiente d'attrito statico μ_s, si può osservare che:

$$f_{smax} = P_x = P \cdot \text{sen}\alpha \qquad \text{e anche:} \qquad f_{smax} = \mu_s \cdot P_y = \mu_s \cdot P \cdot \cos\alpha$$

quindi, uguagliando:

$$P \cdot \text{sen}\alpha = \mu_s \cdot P \cdot \cos\alpha \qquad \text{e pertanto:} \qquad \boxed{\mu_s} = P \cdot \text{sen}\alpha / P \cdot \cos\alpha = \boxed{\text{tg}\alpha}$$

Cioè:

Il valore della tangente dell'angolo del piano inclinato per il quale il corpo inizia a muoversi rappresenta il coefficiente d'attrito statico μ_s.

In **tab. 2** sono mostrati alcuni valori tipici di μ_s, per differenti combinazioni di materiali, sia per un contatto tal quale, che lubrificato.

Tabella 2 - Alcuni valori tipici del coefficiente d'attrito radente μ_s.

Superficie 1	Superficie 2	μ_s tal quale	μ_s con lubrificazione
Metallo	metallo	0,2	0,07
Legno	legno	0,36	0,11
Metallo	legno	0,38	0,1
Ferodo(*)	acciaio	0,5	0,3

(*) = il ferodo è il materiale tipico, detto "di attrito", depositato sui dischi dei freni.

Si noti che la lubrificazione riduce, nella maggior parte dei casi, di tre volte è più il valore di μ_s.

3.2 Attrito volvente

L'esempio classico, in realtà piuttosto semplicistico rispetto alla realtà, per definire l'attrito volvente è quello del rotolamento di una ruota rigida su una superficie cedevole (la ruota in legno di un carretto su un campo). Con riferimento alla fig. 8, siano f_v e T una coppia di forze, di modulo e direzione uguali e verso opposto, rispettivamente definite f_v attrito volvente e T forza di trazione. Se la ruota è in movimento, esisterà un momento resistente M_r e, per mantenere costanti le caratteristiche di moto, M_r dovrà essere vinto da un corrispondente momento motore M_m.
Definito r il raggio della ruota, P il peso della ruota più eventualmente il carico incidente, e P' la reazione del terreno, anche in questo caso uguale in modulo e direzione e di verso opposto al peso P, per completare il quadro delle grandezze coinvolte resta da definire δ. Tale parametro è una lunghezza, ed è la distanza esistente tra la retta d'azione della forza peso e quella della sua reazione. In una ruota alla quale è applicato un momento motore, tale distanza non è mai nulla, ma è sempre una quantità finita, causata proprio dalla dinamicità del movimento, tale che la forza peso si scarica sul terreno in modo non omogeneo, ma secondo lo sviluppo del diagramma della zona in grigio in **fig. 11**, nel cui centro è posizionata la retta d'azione della reazione P' alla forza peso (si scusi il gioco di parole..).

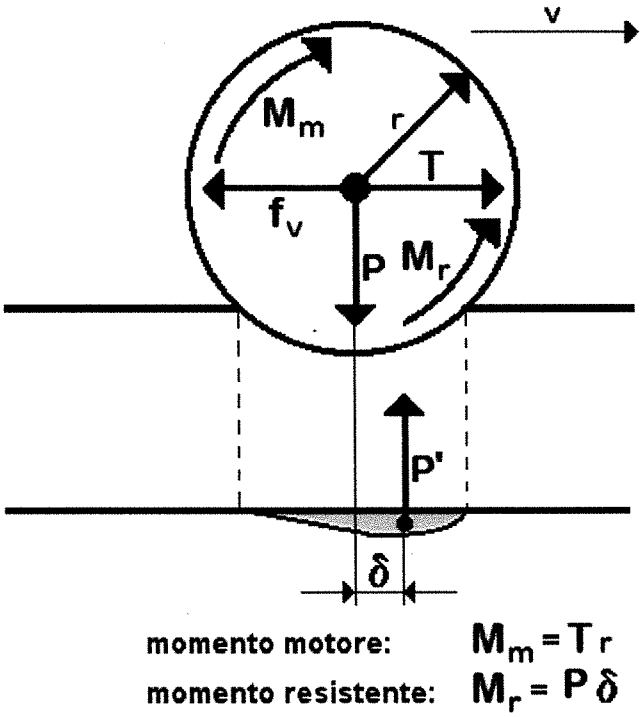


Fig. 11 - Rappresentazione grafica di una tipica situazione di definizione dell'attrito volvente.

Per l'equilibrio dinamico dei momenti, al fine di mantenere invariate le caratteristiche di moto della ruota, in ogni istante il momento motore deve uguagliare il momento resistente, quindi:

$$M_m = M_r \quad \rightarrow \quad T \cdot r = P \cdot \delta$$

da cui:

$$T = P \cdot \delta / r = f_v$$

Il rapporto δ / r è il rapporto tra due lunghezze, e pertanto è adimensionale, cioè un numero. Quindi se si pone:

$$\delta / r = \mu_v$$

la formula precedente diventa:

$$\mathbf{f_v = \mu_v \cdot P}$$

che risulta essere in una forma del tutto analoga a quella dell'attrito radente.

I valori di μ_v per piccoli raggi di rotolamento (≈ 10 mm, **tab. 3**) sono, come è ovvio supporre, molto inferiori a quelli di μ_s, relativi all'attrito radente (*d'altra parte, l'invenzione della ruota, avvenuta parecchio tempo fa, sta da sola a dimostrare tale evidenza...*).

Tabella 3 - Alcuni valori tipici del coefficiente d'attrito volvente μ_v, per piccoli raggi di rotolamento ($\approx$ 10 mm).

Superficie 1	Superficie 2	μ_v
legno	legno	$1 \cdot 10^{-2} \div 5 \cdot 10^{-2}$
ferro	ferro o acciaio	$5 \cdot 10^{-3}$
sfere d'acciaio	nei cuscinetti	$5 \cdot 10^{-4} \div 1 \cdot 10^{-3}$

4. Tensione

La tensione può essere defnita una forza di trazione che viene applicata ad un corpo per tirarlo, per mezzo di fili o funi.

Con riferimento alla **fig. 12**, la forza applicata ad un estremo della fune viene trasmessa al blocco all'altro estremo della fune, tramite ogni particella della fune stessa.

Il blocco però, per la terza legge di Newton, applica una reazione alla fune. Essendo in pratica applicate alla fune, le forze T e -T *tendono* a spezzarla, da qui il termine **tensione**. La capacità di una fune di trasmettere invariata una forza T deve presupporre che:

- la fune sia considerata idealmente di massa nulla, perchè altrimenti una parte della forza T dovrebbe essere impiegata per accelerare la fune;
- la fune sia considerata inestensibile, cioè che la forza T non sia utilizzata per allungarla, deformandola elasticamente o addirittura in modo permanente.

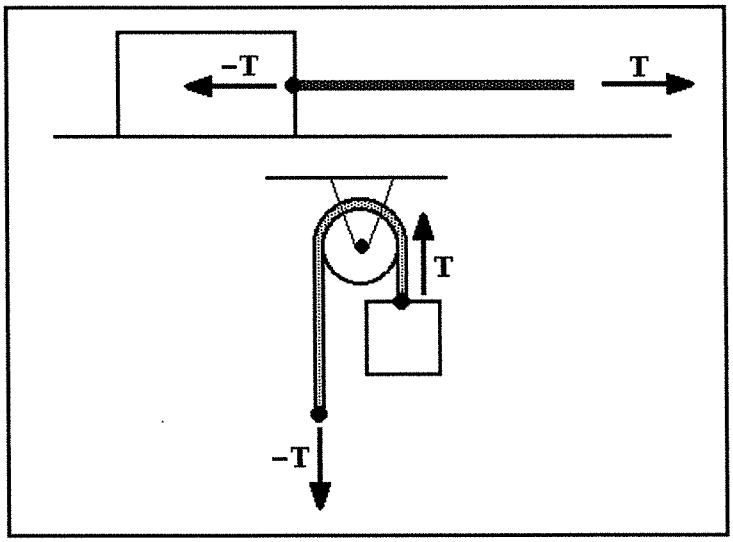


Fig. 12 - Essendo in pratica applicate alla fune, le forze T e -T *tendono* a spezzarla, da qui il termine **tensione.**

La proprietà di una fune con le supposizioni precedenti di tramettere una forza T rimane invariata anche quando la fune passa attraverso un corpo, come ad esempio una carrucola (**fig. 12**), a patto di considerare anche in questo caso la carrucola idealmente senza massa e funzionante senza attriti (del perno e della fune nella gola).

5. Forza centripeta e forza centrifuga

Senza entrare nel dettaglio (che trascenderebbe dalle finalità del corso), si possono fare alcune riflessioni su questi due tipi di forze, che sono in pratica l'una un'azione, e l'altra la reazione alla prima. In realtà quella che ogni essere umano avverte quando per esempio compie un movimento di moto circolare è proprio la reazione (la forza centrifuga) alla vera e propria azione (la forza centripeta).
Partendo dai seguenti presupposti:

$$\mathbf{F_c = m \cdot a_c} \quad \text{e} \quad \mathbf{m = P / g} \quad \text{e ancora} \quad \mathbf{a_c = v^2 / r}$$

dove:
F_c = forza centripeta (forza centrifuga, uguale in modulo, in valore assoluto, N)
a_c = accelerazione centripeta (accelerazione centrifuga, uguale in modulo, in valore assoluto, m/s^2)
m = massa del corpo (kg)
P = peso del corpo (N)
g = accelerazione di gravità (9,81 m/s^2)
v = velocità del corpo (considerata costante, m/s)
r = raggio della traiettoria circolare percorsa dal corpo (m)

la formula per il calcolo della forza centripeta (centrifuga) è la seguente (**fig. 13**):

$$\mathbf{F_c = \frac{P \cdot v^2}{g \cdot r}}$$

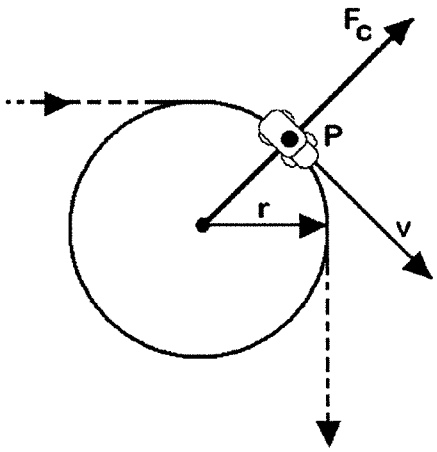


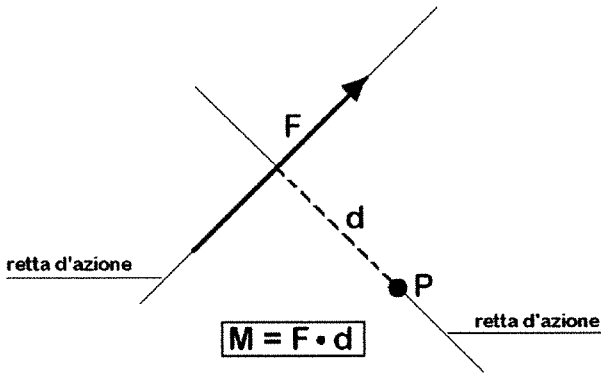
Fig. 13 – Rappresentazione grafica dei parametri per il calcolo della forza centrifuga.

Si possono fare alcune considerazioni al riguardo. Se ad esempio si fa riferimento all'effetto della forza centrifuga che agisce su un sistema "automobile", composto dal guidatore + l'automobile vera e propria, con il sistema che sta percorrendo una strada con delle curve e veloctà variabili, possiamo fare mente locale alle sensazioni che seguono. La forza centrifuga di cui (ognuno di noi come guidatore) avvertirà gli effetti sarà:

- **direttamente proporzionale** (*con progressione **lineare***) alla forza peso del corpo; se il sistema "automobile" ha un peso doppio di un altro, la forza centrifuga che agirà sarà doppia, in modulo. In altre parole, a parità di tutti gli altri fattori, sarà più probabile uscire di strada con l'automobile a pieno carico che non con la medesima a vuoto;
- **inversamente proporzionale** all'accelerazione di gravità; essendo però sulla Terra questo valore pressocchè costante, la forza centrifuga lo sarà parimenti, se non cambiano altri fattori;
- **inversamente proporzionale** (*con decremento **lineare***) al raggio della traiettoria circolare percorsa. Sempre seguendo l'esempio precedente, più la curva sarà "stretta" (cioè con raggio ridotto) e maggiore sarà la forza centrifuga, e quindi la probabilità di uscire di strada:
- **direttamente proporzionale**, ***ma con progressione quadratica***, alla velocità di percorrrenza della curva. In altre parole, se si raddoppia la velocità dell'automobile, la forza centrifuga si quadruplicherà ($2^2 = 4$), rendendo molto più probabile l'uscita di strada. **In pratica, la velocità è di gran lunga il fattore maggiormente influente che determina la "tenuta di strada" del veicolo**. (*Ecco perché non si raccomanda mai abbastanza di moderare la velocità, quando si viaggia in automobile...*).

Momento di una forza

Si definisce "momento di una forza" M (***senza alcun riferimento** al momento inteso **come intervallo di tempo...***), il prodotto dell'**intensità** (o **modulo**) di una forza **F** per la distanza **d** (**braccio**) della retta di azione della forza F da un punto di riferimento P, rispetto al quale si calcola il momento **M** (**fig. 14**).



(per distanza d *si intende la distanza **minima** tra il punto di riferimento P e la retta d'azione della forza F. Tale distanza* d *è minima solo quando è riferita alla **retta perpendicolare alla retta d'azione della forza**).*

Fig. 14 – Rappresentazione grafica del momento di una forza.

Una COPPIA (di forze) è costituita da due forze (F_1 e F_2) di **pari intensità** (o modulo), **direzioni parallele** e **verso opposto** (**fig. 15**).

Se ad un corpo rigido di applica una coppia di forze, esso si pone in rotazione perché risulta sottoposto all'azione di un momento pari a:

$$\mathbf{M = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d}$$

(attenzione! Il momento ***non*** *è dato dalla somma delle forze per i rispettivi bracci, ma bensì dal modulo di una delle due forze, che sono uguali tra loro, per il braccio. Infatti, la risultante delle due forze è nulla, perché esse sono di uguale modulo e direzione ,infatti sono sempre parallele, ma hanno verso opposto. Poiché le loro rette di azione sono separate dal braccio rispetto al punto di applicazione, che in questo caso sarà proprio il centro di rotazione).*

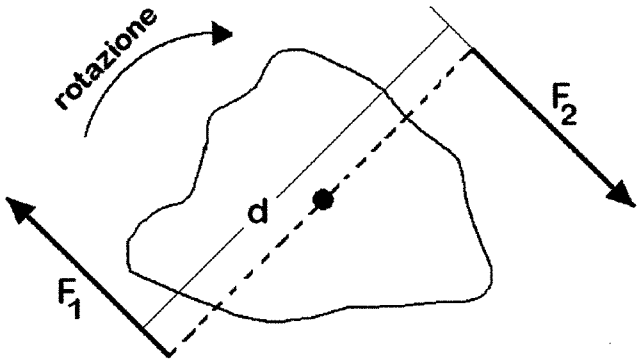


Fig. 15 – Rappresentazione grafica dell'azione di una coppia di forze.

Lavoro

Il concetto comune di "lavoro" differisce da quello della fisica: quando si tiene in mano una valigia, senza muoverla *in senso verticale*, non facendo variare cioè la sua posizione rispetto al terreno, si fa fatica, ma per la fisica non si compie lavoro.

Per la fisica, invece, il lavoro è quindi legato strettamente al concetto di spostamento, essendo definito come il prodotto **scalare** tra il vettore forza F e il vettore spostamento s:

$$L = \mathbf{F} \cdot s$$

La formula presentata è corretta a patto che la direzione del vettore spostamento sia coincidente, o parallela, a quella del vettore forza; se ciò non avviene, e quindi in un caso più generale, il lavoro è il prodotto scalare tra il vettore forza F e il componente algebrico del vettore spostamento s lungo la direzione della forza o, il che è lo stesso, il prodotto scalare del vettore spostamento s e il componente algebrico del vettore forza F lungo la direzione dello spostamernto (**fig. 16**).

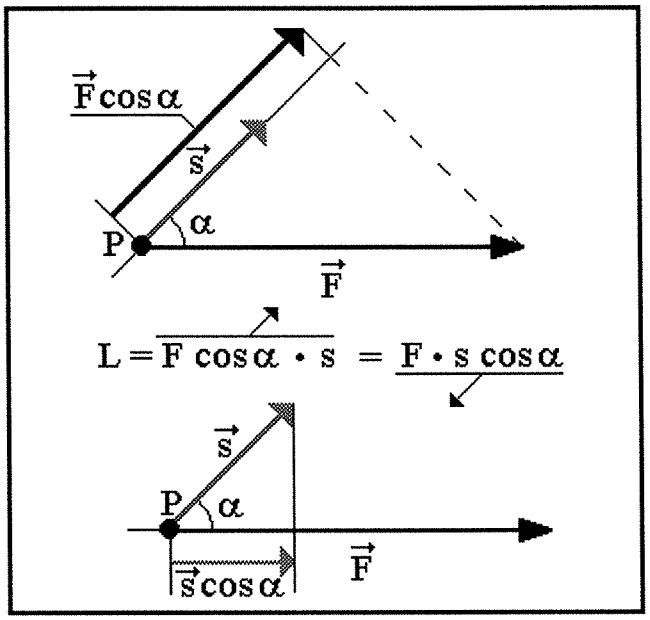


Fig. 16 - Quando la direzione dello spostamento e della forza non coincidono, il lavoro si calcola come il prodotto del modulo di una delle due grandezze per quello relativo alla componente dell'altra secondo la direzione della prima.

Quindi:

$$L = F\cos\alpha \cdot s \qquad \text{e anche} \qquad L = F \cdot s\cos\alpha$$

Si possono configurare due casi particolari:

- se $\alpha = 0°$ è $\cos\alpha = 1$ e risulta $L = F \cdot s$; è il caso di una forza orizzontale che spinge un corpo orizzontalmente;
- se $\alpha = 90°$ è $\cos\alpha = 0$ e risulta $L = 0$; è il caso, visto prima, di tenere sollevato, fermo, ad una certa altezza un peso (ad es. una valigia). Per quanto possa sembrare assurdo, per la fisica questo non è lavoro, perchè è nullo lo spostamento in direzione verticale. In realtà, la muscolatura interessata effettua una serie di rapide contrazioni e rilassamenti e a questa attività muscolare va attribuita la fatica che questa operazione provoca.

Come scalare, il lavoro può essere positivo, nullo o negativo; in particolare quest'ultimo caso si verifica quando la componente della forza nella direzione dello spostamento ha verso opoosto a quest'ultimo, o viceversa.

L'unità di misura è il joule: $1J = 1\ N \cdot m$ (in meccanica spesso si preferisce esprimere l'unità di misura secondo quest'ultima forma, perchè più immediatamente intuibile come il prodotto scalare di forza per spostamento).

Nel caso in cui la forza F che compie lo spostamento s non sia costante, bisogna ricorrere al concetto di integrale per calcolare il lavoro L; l'esempio geometrico che segue illustra nel modo tradizionale tale concetto (**fig. 17**).

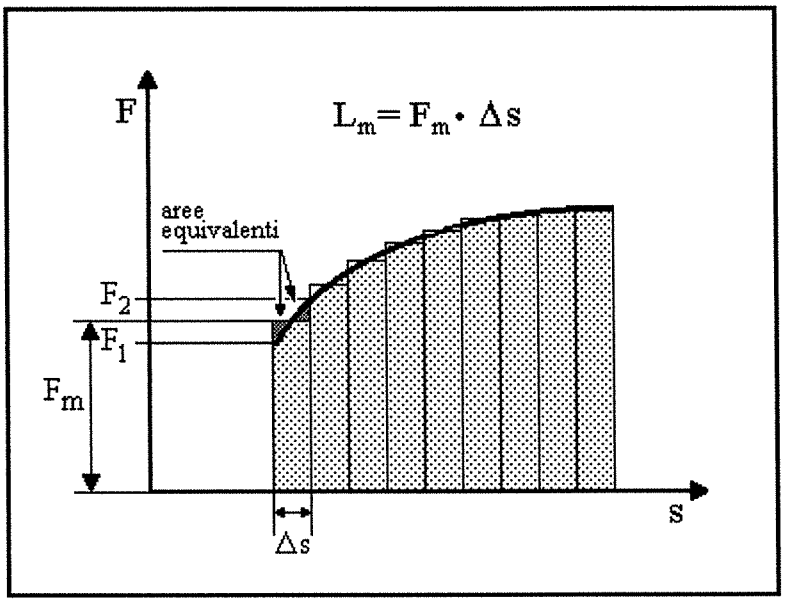


Fig. 17 - Calcolo del lavoro quando la forza non è costante.

Suddividendo lo spostamento s in un numero sufficientemente elevato di intevalli Δs, tali da poter considerare come segmenti rettilinei di curva compresi tra gli estremi di Δs, e definendo F_m il valore medio di F nell'intevallo considerato, il lavoro L_m è l'area del rettangolo di base Δs e di altezza F_m. Estendendo il calcolo a tutti i Δs, si ha:

$$L = \sum_{n=1}^{N} F_n \Delta s_n$$

e di conseguenza:

$$\lim_{\Delta t \to 0} L = \sum_{n=1}^{N} F_n \Delta s_n = \int_0^s F(s)\ ds$$

Nel caso, piuttosto frequente, che sul punto materiale agiscano più forze, si può operare in due modi:

- si riducono tali forze ad un'unica risultante, che permette di calcolare L;
- poichè il lavoro è una grandezza scalare additiva, si possono calcolare i lavori eseguiti dalle singole forze e poi sommarli.

Energia

Se si considera di nuovo un corpo in moto (per semplicità, di moto uniforme, ad esempio) e si ipotizza che una generica forza F agisca su di esso, si può facilmente immaginare che vari lo stato di moto (cioè cambi *il modulo* del vettore velocità) e, in un determinato periodo di osservazione, da una velocità iniziale v_0 il corpo passi una velocità finale v. Se la forza in gioco è costante, si può scrivere:

$L = F \cdot s$ e ricordando: $F = ma$ e $s = x - x_0$ si può scrivere:

$$L = ma \cdot (x - x_0)$$

Poichè F e m sono costanti, è costante anche l'accelerazione, e ciò ci permette di applicare le equazioni della cinematica per valori costanti di a:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad \text{da cui si ricava:} \qquad x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

e sostituendo nell'equazione iniziale:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

L'effetto del lavoro eseguito sul corpo dalla forza F è quello di variare della quantità **$1/2mv^2$**, che viene definita **energia cinetica E_c**, quindi:

il lavoro eseguito dalla risultante delle forze applicate a un corpo è uguale alla variazione della sua energia cinetica.

Anche l'enrgia cinetica è una quantità scalare, che però **non è mai negativa**. La sua unità di misura è uguale a quella del lavoro, il joule.

Potenza

La potenza si definisce come il rapporto tra il lavoro compiuto e il tempo impiegato a compierlo, cioè:

$$\overline{P} = \frac{L}{t} \text{ (potenza media)} \qquad e \qquad P = \frac{dL}{dt} \text{ (potenza istantanea)}$$

L'unità di misura è il Watt (W), espresso come J/s o, come più frequentemente si osserva in meccanica, in N·m/s. Quest'ultima notazione suggerisce un'interessante punto di vista del parametro potenza, che può infatti essere espressa in termini di forza che agisce e velocità del corpo, anche nel caso di forze non costanti, cioè:

Analogamente al lavoro, la potenza può essere negativa.

Il concetto di RENDIMENTO

La definzionedi "**rendimento**" può essere applicata ad un *sistema*, ad una *macchina*, ecc. In pratica, si tratta del ***rapporto tra l'energia, cioè il lavoro, o la potenza uscente ed entrante in un sistema o una macchina*** (**fig. 18**):

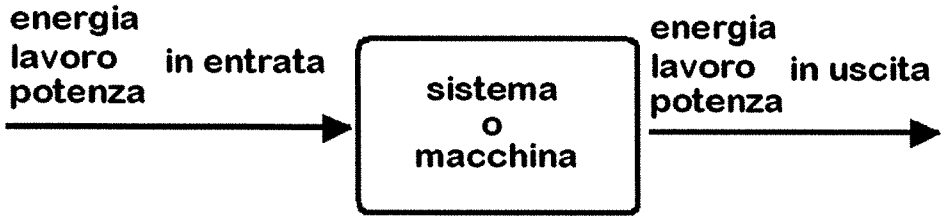


Fig. 18 - Esplicitazione grafica che prelude al conetto di rendimento.

$$\frac{\text{Energia uscente}}{\text{Energia entrante}} = \frac{\text{Lavoro uscente}}{\text{Lavoro entrante}} \rightarrow \text{da cui} \quad \frac{\text{Potenza uscente}}{\text{Potenza entrante}}$$

In una qualsiasi macchina M funzionante a regime , il Lavoro motore L_m (lavoro entrante) si ripartisce in:

- Lavoro utile (L_u, lavoro uscente, cioè energia impiegata a fini utili)
- Lavoro passivo (L_p, lavoro impiegato per vincere gli attriti interni della macchina, cioè energia dissipata sotto forma di calore)

$$L_m = L_u + L_p$$

Con riferimento specifico ad un macchina, si definisce infine il rendimento η:

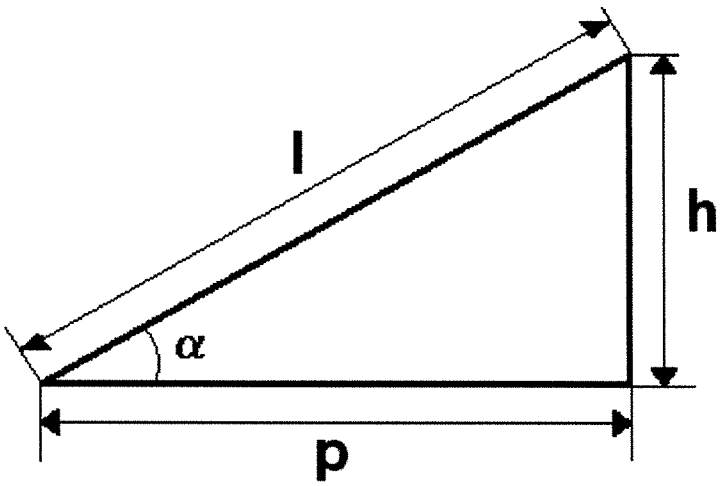
$$\eta = \frac{L_u}{L_m} \quad \text{dove:} \quad L_u < L_m \quad \text{e quindi:} \quad \boxed{\eta < 1} \rightarrow \textbf{SEMPRE}$$

Si noti che η è adimensionale, cioè è un numero, ***perché è il rapporto tra i valori di due grandezze uguali.***

Pendenza

Quando su un cartello stradale triangolare (cioè di "attenzione"), posto ai lati di una strada in montagna, si trova disegnato un piano inclinato con l'indicazione di un valore percentuale (ad es.: 12 %), tutti coloro che hanno la patente di guida dovrebbero conoscerne il significato, e cioè che quel tratto di strada (ad es. un chilometro) ha il 12 % di pendenza.
Ma a quale dislivello, cioè a quale differenza di quota porta, dal punto di partenza al punto di arrivo, tale pendenza?

Si sarebbe portati a dire: 12 % = 0,12, e quindi: 1000 m • 0,12 = 120 m. E' sbagliato ! (Anche se non di molto...)
Per capire come bisona effettuare un calcolo corretto, è sufficiente richiamare le regole di base della trigonometria, applicate al triangolo rettangolo. Con riferimento alla figura che segue, che mostra un generico piano inclinato (ad se. un tratto di strada), idealizzato proprio in un triangolo rettangolo (**fig. 19**), se:



l = lunghezza
h = dislivello
p = proiezione ***sull'orizzontale***
α = angolo alla base

Fig. 19 - Rappresentazione schematica per esplicitare il concetto di pendenza.

si possono applicare le seguenti formule trigonometriche:

$$\mathbf{h = l \cdot sen\ \alpha} \qquad \text{e anche} \qquad \mathbf{p = l \cdot cos\ \alpha}$$

E cioè:

"in un triangolo rettangolo, **un cateto (h) è uguale all'ipotenusa (l) per il seno dell'angolo opposto (sen α)**"

e anche :

"in un triangolo rettangolo, **un cateto (p) è uguale all'ipotenusa (l) per il coseno dell'angolo adiacente (cos α)**"

Ricordando, infine, che "in un triangolo rettangolo, il rapporto tra il cateto opposto (h) e quello adiacente (p) ad un angolo definiscono la sua tangente (tg α)", si può scrivere:

$$\boxed{h/p = tg\ \alpha}$$

Quindi, riprendendo l'esempio già proposto, se la pendenza è il 12 %, e quindi in valore assoluto 0,12, è proprio questo il valore del rapporto h/p, cioè:

"c'è un dislivello di 12 m ogni 100 m di ***proiezione orizzontale*** del tratto di strada"

Quindi, se si vuol ricavare il valore dell'angolo α :

α = arc tg 12° = **6,8428 °** (*non ci si meravigli del dettaglio al quarto decimale...*)

Quanto vale allora, realmente, il dislivello di quel chilometro di strada in pendenza?

$h = l \cdot \text{sen}\ \alpha$ per cui: $h = 1000\ \text{m} \cdot \text{sen}\ 6{,}8428° = 119{,}15\ \text{m}$

Si osservi che il risultato è molto simile, *ma non uguale*, a quello che in un primo tempo, erroneamente e semplicisticamente (120 m), si era portati a calcolare... Tale similitudine deriva dal fatto che, per angoli piccoli, orientativamente fino a 5° circa, il valore del seno di un angolo e quello della tangente sono molto simili, tali che, per verificarne la differenza, bisogna esplicitarne il valore fino al quarto, o il quinto, o addirittura il sesto decimale (**tab. 4**).

angolo (°)	sen	tg
1	0,017452	0,017455
2	0,03490	0,03492
3	0,0523	0,0524
4	0,0698	0,0699
5	0,0871	0,0875
6	0,104	0,105

Tab. 4 - Prima cifra decimale di differenziazione (in grassetto) tra valori del seno e della tangente di piccoli angoli.

Un angolo del piano inclinato di 5° corrisponde ad una pendenza di: tg 5° = 0,0875 ≈ 9 %, che è un valore frequentemente riscontrabile per le strade pubbliche. Ecco perché, per misurazioni che devono essere precise, non si può "assimilare" seno e tangente dell'angolo, ma i due valori devono essere generalmente esplicitati almeno fino al quarto decimale, per una loro corretta identificazione.